



**Zadania na XXI Podkarpacki Konkurs Matematyczny
im. Franciszka Lejki
Poziom III**

(klasy trzecie liceum i technikum po szkole podstawowej)

Finał

9 kwietnia 2022 r. godzina 10.00

(150 minut)

1. Dany jest wielomian $W(x) = x^3 + bx^2 - c^2x + d$. Wiedząc, że zachodzi warunek $W(1) + W(-1) = 0$ oraz współczynniki b, c, d są nieujemne oblicz sumę wszystkich pierwiastków rzeczywistych tego wielomianu.
2. Dana jest liczba całkowita $n > 1$. Udowodnij, że liczba $n^4 + 4^n$ jest złożona.
3. Prosta równoległa do jednego boku trójkąta dzieli ten trójkąt na dwie figury o równych polach. Wykaż, że ta prosta dzieli pozostałe boki trójkąta w stosunku $k = \sqrt{2} - 1$.
4. Dla dodatnich liczb rzeczywistych x, y wykaż nierówność:
$$x^2 + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y^2} \geq 3\sqrt{2}.$$
5. Dany jest trójkąt o bokach długości $a, 2a$ oraz kącie między tymi bokami o mierze 120° . Oblicz sumę odległości środka okręgu opisanego na tym trójkącie od podanych boków trójkąta.

Powodzenia!